PROGRAMAREA LINIARĂ

1. Să se optimizeze:

Forma canonică a problemei de programare liniară este:

$\max F(x, y) = 10 \cdot x + 15 \cdot y$ - funcția de maximizare

$\begin{cases} 12 \cdot x + 13 \cdot y \le 50 \\ 4 \cdot x + 9 \cdot y \le 25 \end{cases}$ - sistem de restricții

$x \ge 0; \quad y \ge 0$

Se modifică problema la notațiile care ne sunt mai familiare:

$\max F(x_1, x_2) = 10 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2$ - funcția de maximizare

$\begin{cases} 12 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2 \le 50 \\ 4 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \le 25 \end{cases}$ - sistem de restricții

$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$

Trecerea de la ***forma canonică*** la ***forma standard*** se face prin adăugarea unei variabile suplimentare (de egalizare) pentru fiecare inecuație a sistemului de restricții.

În cazul nostru sistemul are două inecuații, deci se vor introduce două variabile de egalizare notate: x_3 şi x_4.

$$\begin{cases} 12 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2 + x_3 = 50 \\ 4 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + x_4 = 25 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \quad x_3 \ge 0; \quad x_4 \ge 0$

Acest sistem se mai poate scrie:

$$\begin{cases} 12 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 50 \\ 4 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 25 \end{cases}$$

Din sistemul de ecuații se construieşte matricea A şi b:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 50 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Funcția de maximizare devine:

$$\max F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 10 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

Se construieşte matricea C:

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se trasează un tabel în care se trec pe coloane mai întâi variabilele de egalizare (în cazul nostru x_3 şi x_4) şi apoi variabilele care trebuie determinate (cazul nostru x_1 şi x_2), valorile fiind luate din matricea A.

vector de bază

Coloana care iese din vectorul de bază

Coloana care intră în vectorul de bază

pivot

La numitor se trece vectorul coloană care intră în bază (cazul nostru x_2)

	x_3	x_4	x_1	x_2	$B^{-1}\cdot b$	$\min \frac{B^{-1}\cdot b}{x_2}$
	1	0	12	13	50	50/13 = 3,84
	0	1	4	$\boxed{9}$	25	25/9 = 2,77
C_j	0	0	10	15		
Z_j	-	-	0	0		
Z_j-C_j	-	-	-10	-15		
			<0	<0		

Completarea tabelului:

- coloanele x_3, x_4, x_1, x_2 se completează cu valorile din matricea A;
- $B^{-1}\cdot b = b$;
- linia C_j se completează cu valorile din matricea C;
- linia Z_j se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele x_3, x_4) se trece „linie” → „-”, iar sub coloanele x_1, x_2 valorile se calculează astfel:

$$C_j \cdot x_1 = 0\cdot 12 + 0\cdot 4 = 0$$

$$C_j \cdot x_2 = 0\cdot 13 + 0\cdot 9 = 0$$

- se calculează apoi diferența Z_j-C_j, rezultând pe coloanele x_1 şi x_2 valorile –10 şi –15. Deoarece există diferențe (negative) Z_j-C_j<0 **rezultă că soluția nu este optimă**;
- se caută maximul diferențelor negative $\max\left|Z_j - C_j\right|$ astfel:

$$\max\left|Z_j - C_j\right| = \max\left|-10,\,-15\right| = \max(10,15) = 15$$

Deoarece valoarea 15 se găseşte pe coloana x_2 **rezultă că vectorul x_2 intră în bază**.

- pentru a determina vectorul care iese din bază se pune condiția:

$$\min\left\{\frac{B^{-1}\cdot b}{x_2}\right\} \Rightarrow \min\left\{\frac{50}{12},\frac{25}{9}\right\} = \min\{3{,}84,\ 2{,}77\} = 2{,}77$$

Deoarece valoarea 2,77 se găseşte pe a doua linie, se caută pe această linie în vectorul de bază valoarea „1”. În cazul nostru cifra „1” am găsit-o pe coloana x_4, rezultă că x_4 iese din bază.

- se stabileşte pivotul care se găseşte la intersecția dintre coloana care intră în vectorul de bază (x_2 în cazul nostru) şi linia pe care am găsit minimul $\min\left\{\frac{B^{-1}\cdot b}{x_2}\right\} = 2{,}77$ (a doua linie în cazul nostru).

Se completează un nou tabel, astfel:

- x_2 şi x_4 îşi schimbă pozițiile între ele **dar nu şi valorile**;
- în vectorul de bază (sub x_3, x_2) se completează matricea unitate $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

Coloana care iese din vectorul de bază

Coloana care intră în vectorul de bază

La numitor se trece vectorul coloană care intră în bază (cazul nostru x_1^{p1})

vector de bază

pivot

	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_1^{p1}}$	$\mathbf{x_4^{p1}}$	$\mathbf{B^{-1}\cdot b^{p1}}$	$\mathbf{\min \frac{B^{-1}\cdot b^{p1}}{x_1^{p1}}}$
	1	0	$\boxed{6,22}$	-1,44	13,88	13,88/6,22 = 2,21
	0	1	0,44	0,11	2,77	2,77/0,44 = 6,29
C_j	0	15	10	0		
Z_j	-	-	6,6	1,65		
Z_j-C_j	-	-	-3,4 <0	1,65 >0		

- coloanele x_1^{p1}, x_4^{p1} şi $B^{-1}\cdot b^{p1}$ se recalculează cu regula pivotului;

x_1	x_2	x_1^{p1}
a = 12	c = 13	$a-\frac{c\cdot b}{\boxed{d}}=12-\frac{13\cdot 4}{\boxed{9}}=6,22$
b = 4	d = $\boxed{9}$	b/d=4/$\boxed{9}$ = 0,44 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot

x_4	x_2	x_4^{p1}
0	13	$0-\frac{13\cdot 1}{\boxed{9}}=-1,44$
1	$\boxed{9}$	1/$\boxed{9}$ = 0,11 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot

$B^{-1}\cdot b$	x_2	$B^{-1}\cdot b^{p1}$
50	13	$50-\frac{13\cdot 25}{\boxed{9}}=13,88$
25	$\boxed{9}$	25/$\boxed{9}$ = 2,77 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot

- linia C_j se completează din matricea C, ţinând cont de valorile lui $x_1 \div x_4$;
- linia Z_j se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele x_3 şi x_2) se trece „linie” → „-”, iar sub coloanele x_1^{p1}, x_4^{p1} valorile se calculează astfel:

$$C_j \cdot x_1^{p1} = 0\cdot 6,22 + 15\cdot 0,44 = 6,6$$

$$C_j \cdot x_4^{p1} = 0\cdot (1,44) + 15\cdot 0,11 = 1,65$$

- se calculează apoi diferenţa Z_j-C_j, rezultând pe coloanele x_1^{p1} şi x_4^{p1} valorile –3,4 şi 1,65. Deoarece există o diferenţă (negativă) Z_j-C_j<0 **rezultă că soluţia nu este optimă**;
- se caută maximul diferenţelor negative $\max|Z_j - C_j|$ astfel:

$$\max|Z_j - C_j| = \max|-3,4| = \max(3,4) = 3,4$$

Deoarece valoarea 3,4 se găseşte pe coloana x_1^{p1} **rezultă că vectorul x_1^{p1} intră în bază**.

- pentru a determina vectorul care iese din bază se pune condiţia:

$$\min\left\{\frac{B^{-1}\cdot b^{p1}}{x_1^{p1}}\right\} \Rightarrow \min\left\{\frac{13,88}{6,22}, \frac{2,77}{0,44}\right\} = \min\{2,21,\ 6,29\} = 2,21$$

Deoarece valoarea 2,21 se găseşte pe prima linie, se caută pe această linie în vectorul de bază valoarea „1”. În cazul nostru cifra „1” am găsit-o pe coloana x_3, rezultă că x_3 iese din bază.

- se stabileşte pivotul care se găseşte la intersecția dintre coloana care intră în vectorul de bază (x_1^{p1} în cazul nostru la acest pas) şi linia pe care am găsit minimul $\min\left\{\frac{B^{-1}\cdot b^{p1}}{x_1^{p1}}\right\} = 2,21$ (prima linie în cazul nostru la acest pas).

Se completează un nou tabel, astfel:

- x_3 şi x_1^{p1} îşi schimbă pozițiile între ele **dar nu şi valorile**;
- în vectorul de bază (sub x_1^{p1} şi x_2,) se completează matricea unitate $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

vector de bază

	x_1^{p1}	x_2	x_3^{p2}	x_4^{p2}	$B^{-1}\cdot b^{p2}$
	1	0	0,16	-0,23	2,23
	0	1	-0,07	0,21	1,78
C_j	10	15	0	0	
Z_j	-	-	0,55	0,85	
Z_j-C_j	-	-	0,55 >0	0,85 >0	

- coloanele x_3^{p2}, x_4^{p2} şi $B^{-1}\cdot b^{p2}$ se recalculează cu regula pivotului;

x_3	x_1^{p1}	x_3^{p2}
1	$\boxed{6,22}$	$1/\boxed{6,22} = 0,16$ – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot
0	0,44	$0-\frac{0,44\cdot 1}{\boxed{6,22}} = -0,07$

x_4^{p1}	x_1^{p1}	x_4^{p2}
-1,44	$\boxed{6,22}$	$-1,44/\boxed{6,22} = -0,23$ – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot
0,11	0,44	$0,11-\frac{0,44\cdot(-1,44)}{\boxed{6,22}} = 0,21$

$B^{-1}\cdot b^{p1}$	x_2	$B^{-1}\cdot b^{p2}$
13,88	$\boxed{6,22}$	$13,88/\boxed{6,22} = 2,23$ – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot
2,77	0,44	$2,77-\frac{0,44\cdot 13,88}{\boxed{6,22}} = 1,78$

- linia C_j se completează din matricea C, ținând cont de valorile lui $x_1 \div x_4$;
- linia Z_j se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele x_1^{p1} şi x_2) se trece „linie” → „-”, iar sub coloanele x_3^{p2}, x_4^{p2} valorile se calculează astfel:

$$C_j \cdot x_3^{p2} = 10\cdot 0,16 + 15\cdot(-0,07) = 0,55$$

$$C_j \cdot x_4^{p2} = 10 \cdot (-0{,}23) + 15 \cdot 0{,}21 = 0{,}85$$

- se calculează apoi diferenţa Z_j-C_j, rezultând pe coloanele x_3^{p2} şi x_4^{p2} valorile +0,55 şi +0,85. Deoarece nu există o diferenţă (negativă) Z_j-C_j>0 **rezultă că s-a atins soluţia optimă**;

Stabilirea soluţiei optime:

vector de bază

	x_1^{p1}	x_2	x_3^{p2}	x_4^{p2}	$B^{-1} \cdot b^{p2}$
	1	0	0,16	-0,23	2,23
	0	1	-0,07	0,21	1,78
C_j	10	15	0	0	
Z_j	-	-	0,55	0,85	
Z_j-C_j	-	-	0,55 >0	0,85 >0	

$$x_1 = 2{,}23$$
$$x_2 = 1{,}78$$